SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

Zavod za matematiku

Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu

Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Zoran Marić
3275

UVOD

Parcijalne diferencijalne jednadžbe pojavljuju se u vezi s različitim fizikalnim i geometrijskim problemima kada je riječ o funkciji s dvije ili više nezavisnih varijabli. Te varijable mogu biti vrijeme i jedna ili više prostornih koordinata.

Osnovni pojmovi

Parcijalna diferencijalna jednadžba je ona jednadžba koja uključuje jednu ili više parcijalnih derivacija funkcije od jedne ili više nezavisne varijable. Derivacija najvišeg reda u jednadžbi određuje red parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Kao i u slučaju običnih diferencijalnih jednadžbi kažemo da je parc. dif. jednadžba linearna ako je prvog reda i u zavisnoj varijabli i u njezinim parcijalnim derivacijma. Ako svaki član takve jednadžbe sadrži ili zavisnu varijablu ili jednu od njenih derivacija, za jednadžbu se kaže da je homogena. U suprotnom je nehomogena.

Primjer 1. Neke važne linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ - jednodimenzionalna valna jednadžba

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ - jednodimenzionalna jednadžba vođenja topline

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ - dvodomenzionalna Laplaceova jednadžba

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ - dvodimenzionalna Poissonova jednadžba

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ - trodimenzionalna Laplaceova jednadžba

pri čemu je $\boldsymbol{c}$ konstanta, $\boldsymbol{t}$ vrijeme, a $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ koordinate u prostoru. Jednadžba (4) je nehomogena ($f \not\equiv 0$), dok su ostale homogene.

Rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u nekom području $\boldsymbol{P}$ prostora nezavisnih varijabli je funkcija, koja skupa sa svojim parcijalnim derivacijama zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu na cijelom području $\boldsymbol{P}$.

Općenito, rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe je vrlo složeno. Na primjer, za prije navedenu jednadžbu (3) neka od rješenja su:

$$(6) \qquad u = x^2 - y^2, \qquad u = e^x \cos y, \qquad u = \ln\left(x^2 + y^2\right),$$

pri čemu su ona međusobno posve različita. Jedinstveno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe, koja opisuje dani fizikalni problem, postiže se dodatnim podatcima koje nalazimo u dotičnom problemu (fizikalnoj situaciji). Na primjer, u nekim slučajevima rješenje je određeno vrijednostima na granici domene ("granični uvjeti"), dok je u drugim slučajevima , kad je vrijeme $\boldsymbol{t}$ jedna od nezavisnih vrijabli, ono određeno vrijednostima u $t = 0$ ("početni uvjeti").

Mi znamo, da ako je obična diferencijalna jednadžba linearna i homogena novo riješenje jednadžbe se postiže zbrajanjem poznatih rješenja. Isto vrijedi za homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Osnovni teorem 1. Ako su u_1 i u_2 u nekom području rješenja linearne homogene parcijalne jednadžbe, tada je

$$a = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante, također rješenje te jednadžbe u tom području.

Jednodimenzionalni tok topline

Širenje topline kroz homogeno tijelo opisuje se jednadžbom

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u\,, \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$$

gdje funkcija $\boldsymbol{u(x, y, z, t)}$ predstavlja temperaturu u tijelu, $\boldsymbol{K}$ je koeficijent prolaza topline, $\boldsymbol{\sigma}$ je specifična toplina i $\boldsymbol{\rho}$ gustoća materijala od kojega je načinjeno tijelo. $\boldsymbol{\nabla^2 u}$ je Laplaceov operator funkcije u, u skladu s Kartezijevim koordinatama x, y, z:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Da bismo pojednostavnili ovu fizikalnu situaciju promatrat ćemo vođenje topline kroz beskonačni štap, tj. širenje topline u jednom smjeru. Da konačna diferencijalna jednadžba nebi bila suviše složena, koristit ćemo se određenim pretpostavkama:

Slika 1

1. Štap ili žica je duljine $\boldsymbol{l}$ i orjentirana je u smjeru osi $\boldsymbol{x}$.
2. Štap je sačinjen od homogenog materijala.
3. Štap je vrlo tanak i poprečni mu je presjek po čitavoj duljini konstantan.
4. Štap je savršeno bočno izoliran čime se postiže tok topline samo u aksijalnom smjeru, tj.u smijeru osi x.

Ovim pretpostavkama se postiže da je funkcija topline oblika $u = u(x,t)$, gdje ona predstavlja temperaturu na nekoj udaljenosti štapa i u nekom vremenu. Tako dobivamo **jednadžbu jednodimenzionalnog vođenja topline**.

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Sparacija varijabli. (Produktna metoda)

Za početak uzmimo da je temperatura na krajevima štapa, $x = 0$ i $x = l$, jednaka nuli. Granični uvjeti su:

(3) $$u(0,t) = 0\,, \qquad u(l,t) = 0 \qquad \text{za sve } t.$$

Neka je $f(x)$ početna temperatura u štapu. Tada su početni uvjeti:

(4) $$u(x,0) = f(x),$$

gdje je $f(x)$ dana funkcija. Naš je zadatak odrediti rješenje $u(x,t)$ jednadžbe (2) koju zadovoljavaju rubni i početni uvjeti dani izrazima (3) i (4).

Prvi korak. Koristeći metodu separacije varijabli, najprije odredimo rješenja jednadžbe (2) koja zadovoljavaju rubne uvjete. Krećemo od

(5) $$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Derivirajući i uvrštavajući u (2) dobivamo

$$F\dot{G} = c^2 F''G$$

Gdje točka označava derivaciju po vremenu, *t*, a crtice derivaciju po *x*. Dijeleći sa c^2FG imamo

$$\frac{\dot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}. \tag{6}$$

Izraz s lijeve strane ovisi samo o *t*, dok izraz s desne strane ovisi samo o *x*. Obje strane moraju biti jednake nekoj konstanti $\boldsymbol{k}$, jer ako izraz na lijevoj strani nije konstanta, promjenom varijable *t*, vrijednost izraza na lijevoj strani će se vjerojatno promijeniti, ali sigurno se neće promijeniti na desnoj strani jer ne ovisi o varijabli *t*. Isto vrijedi i za desnu stranu.
Može se pokazati da za $k \geq 0$ jedino rješenje $u = FG$ koje zadovoljava (9) je $u \equiv 0$. Za negativne $k = -p^2$ dobivamo iz (6)

$$\frac{\dot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=-p^2,$$

odakle se lako izvedu dvije obične diferencijalne jednadžbe

$$F''+p^2F=0 \tag{7}$$

i

$$\dot{G}+c^2p^2G=0. \tag{8}$$

Drugi korak. Uzimajući u obzir (7) opće rješenje je

$$F(x)=A\cos px+B\sin px. \tag{9}$$

Iz rubnih uvjeta slijedi

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0 \qquad \text{i} \qquad u(l,t)=F(l)G(t)=0.$$

Budući da $G \equiv 0$ podrazumjeva da je i $u \equiv 0$, potrebno nam je da je i $F(0)=0$ i $F(l)=0$. Iz (9) slijedi da je $F(0)=A$. Za $A=0$ proizilazi

$$F(l)=B\sin pl.$$

Odavde vidimo da je $B \neq 0$ jer bi inače $F \equiv 0$. Stoga uvjet $F(l)=0$ dovodi do

$$\sin pl = 0 \qquad \text{ili} \qquad p=\frac{n\pi}{l}, \qquad n=1,2,3,\ldots \;.$$

Uzimajući $B=1$ dobivamo rješenje jednadžbe (7), koje zadovoljava (3):

$$F_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad n=1,2,3,\ldots ,$$

Za vrijednosti $p=\frac{n\pi}{l}$ jednadžba (8) poprima oblik

$$\dot{G}+\lambda_n^{\,2}G=0 \qquad \text{gdje je} \qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l}.$$

Opće rješenje je

$$G_n(t)=B_n e^{-\lambda_n^{\,2}t}, \qquad n=1,2,3,\ldots ,$$

Gdje je B_n konstanta. Stoga su funkcije

(10) $$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\lambda_n^{\,2}t}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

rješenja toplinske jednadžbe (2) koja zadovoljavaju (3).

Treći korak. Da bismo našli rješenje koje ujedno zadovoljava (4), tj. početni uvjet promatramo sumu

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\lambda_n^2 t}\qquad\left(\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}\right). \tag{11}$$

Iz ovog izraza i početnog uvjeta, (4), slijedi

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x).$$

Stoga, da bi izraz (11) zadovoljavao početni uvjet koeficijent B_n mora biti uzet tako da $u(x,0)$ postaje **half-range expansion** funkcije $f(x)$, odnosno *Fourierov sinus red* funkcije $f(x)$;

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\qquad n=1,2,3,\ldots\ . \tag{12}$$

Rješenje našeg problema dobivamo ako pretpostavimo da je $f(x)$ po dijelovima neprekinuta funkcija na intervalu $0\le x\le l$ i da ima jednostrane derivacije na svim točkama unutar navedenog intervala. Tada je jednadžba (11) sa koeficijentima danim jednadžbom (12) traženo rješenje našeg fizičkog problema.

Promatrajući izraz (11) vidimo da kako t raste, tj. teži u beskonačnost, vrijednost sume se približava nuli. Brzina opadanja (smanjivanja) ovisi o broju $\boldsymbol{n}$.

Primjer. Neka je početna temperatura zadana izrazom

$$f(x)=\begin{cases} x & za \quad 0<x<\dfrac{l}{2}, \\ l-x & za \quad \dfrac{l}{2}<x<l. \end{cases}$$

Uvrštavanjem u

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

dobivamo

(13) $$B_n=\frac{2}{l}\left(\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right).$$

Dalje, integriranjem se dobiva da je $B_n=0$ za parne n i

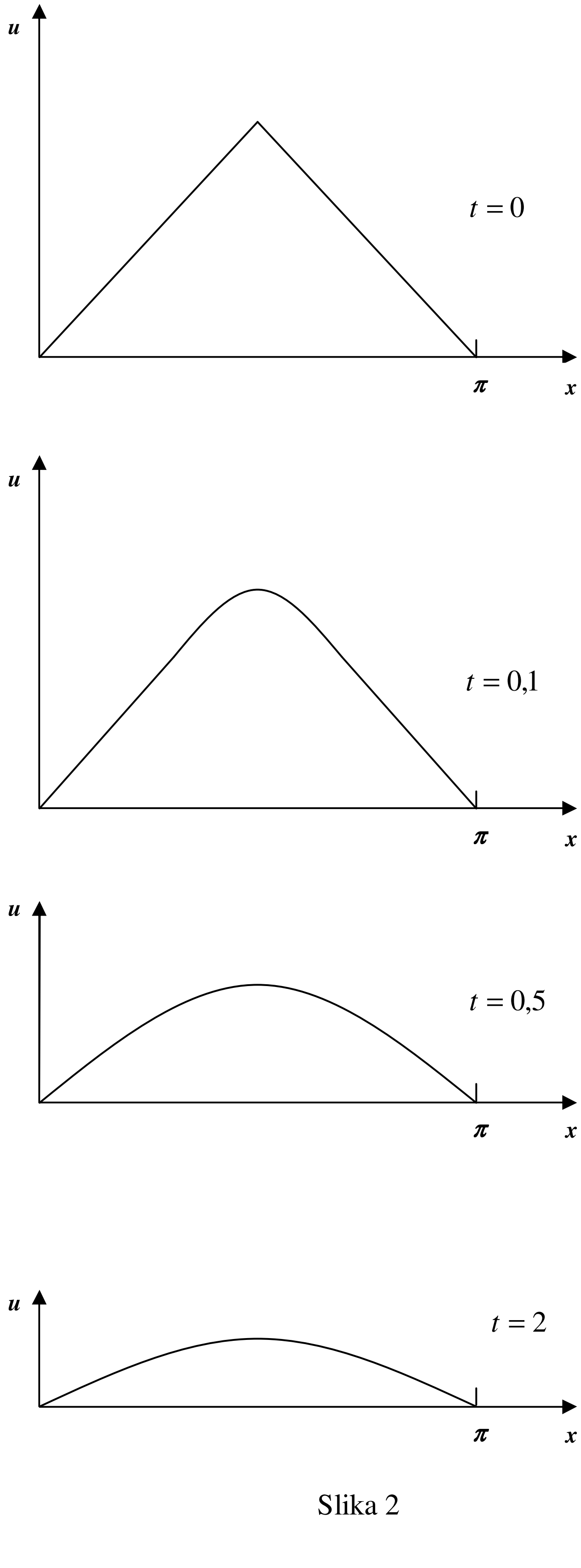
$$B_n=\frac{4l}{n^2\pi^2} \qquad (n=1,5,9,...),$$

$$B_n=-\frac{4l}{n^2\pi^2} \qquad (n=3,7,11,...).$$

Odatle je rješenje

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{l}e^{-(c\pi/l)^2 t}-\frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}e^{-(3c\pi/l)^2 t}+...\right].$$

Za različite vrijednosti t rješenja su prikazana na slici 2



Slika 2

Tok topline u beskonačnom štapu

Sada ćemo razmatrati rješenja toplinske jednadžbe

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za slučaj štapa koji se proteže u beskonačnost na obje strane (bočno izoliranog). U ovom slučaju nemamo granične uvjete već samo početni uvjet

(2) $$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Gdje je $f(x)$ zadana početnom temperaturom štapa.

Da bismo riješili ovaj problem najprije uvodimo $u(x,t) = F(x)G(t)$ u (1). Time dobivamo dvije obične diferencijalne jednadžbe

(3) $$F'' + p^2 F = 0$$

(4) $$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

Funkcije

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \qquad \text{i} \qquad G(t) = e^{-c^2 p^2 t}$$

su rješenja od (3) i (4) s tim da su tu ***A*** i ***B*** po volji odabrane konstante.
Dakle:

(5) $$u(x,t;p) = FG = (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2 p^2 t}$$

je rješenje toplinske jednadžbe. (Kao i u prethodnom poglavlju moramo uzeti konstantu separacije, ***k***, negativnu, $k = -p^2$, zato što pozitivne vrijednosti vode ka povećanju vrijednosti ekponencijalne funkcije u izrazu (5), što nema fizikalnog značenja).

Promatrajući jednadžbu (5) vidimo da za $t = 0$ gubimo eksponencijalni član te nam ostaje samo izraz u zagradi. Daljnjim rješavanjem na uobičajen način, tj. uzimajući p kao umnožak fiksnih brojeva dobivamo periodičnu funkciju $f(x)$. Ako pretpostavimo da funkcija $f(x)$ nije periodična prirodnije je upotrijebiti Fourierov integral umjesto Fourirovog reda.

Budući da su A i B bilo koje konstante možemo smatrati da su one funkcije od p pa pišemo $A = A(p)$, $B = B(p)$. Budući da je toplinska jednadžba linearna i homogena, funkcija

(6) $$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;p)dp = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]e^{-c^2p^2t}dp$$

je tada njezino rješenje.

Iz dobivenog rješenja (6) i početnog uvjeta (2) slijedi

(7) $$u(x,0) = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]dp = f(x).$$

Umjesto funkcija $A(p)$ i $B(p)$ možemo pisati

(8) $$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(d)\cos pv \quad dv, \qquad B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv \quad dv.$$

pa dobivamo

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px - pv)dv\right]dp,$$

Tada funkcija (6) postaje

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px - pv)e^{-c^2p^2t}dv\right]dp.$$

Pretpostavljajući da možemo zamijeniti red integracije imamo

(9) $$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_0^{\infty} e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)dp\right]dv\,.$$

Unutarnji integral se može odrediti koristeći jednakost

(10) $$\int_0^{\infty} e^{-s^2}\cos 2bs \quad ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}\,.$$

Uvodeći novu varijablu integriranja p, supstituirajući s sa $s=cp\sqrt{t}$ i uzimajući da je $b=\dfrac{x-v}{2c\sqrt{t}}$, navedena jednakost prelazi u

$$\int_0^{\infty} e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}}e^{-(x-v)^2/4c^2t}\,.$$

Uvrštavajući ovo rješenje u (9) proizilazi

(11) $$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\exp\left[-\frac{(x-v)^2}{4c^{2t}}\right]dv.$$

Konačno, uvodeći varijablu integracije $w=\dfrac{v-x}{2c\sqrt{t}}$, vidimo da možemo pisati

(12) $$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+2cw\sqrt{t}\right)e^{-w^2}dw.$$

Ako je $f(x)$ ograničena za sve vrijednosti x i integrabilna u svakom konačnom intervalu može se pokazati da funkcija (11) ili (12) zadovoljava (1) ili (2). Stoga je ta funkcija zahtjevano rješenje postavljenog problema.

Primjer. Naći temperaturu u beskonačnom štapu ako je početna temperatura:

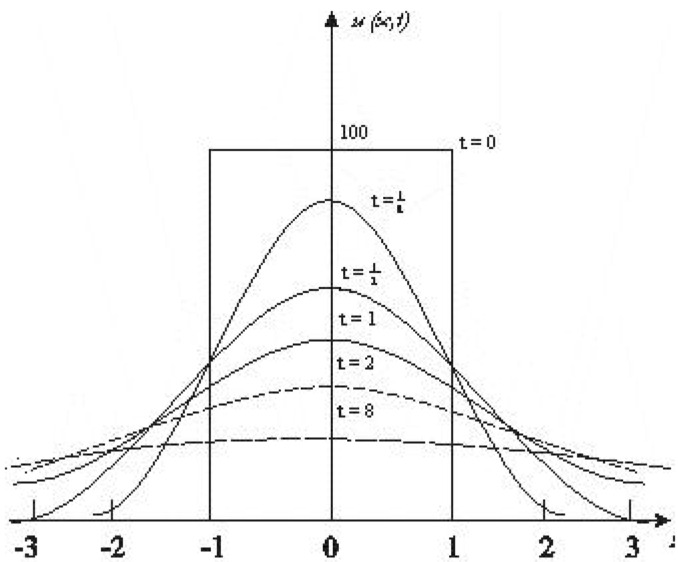
$$f(x) = \begin{cases} U_o = const & za \quad |x| < 1, \\ 0 & za \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Iz (11) imamo

$$u(x,t) = \frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} \exp\left[-\frac{(x-v)^2}{4c^{2t}} \right] dv.$$

Ako uvedemo novu varijablu $w = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ tada integracija po v od -1 do 1 odgovara integraciji po w od $-\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}$ do $\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}$ i dobivamo

$$u(x,t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-(1+x)/\,2c\sqrt{t}}^{(1-x)/2c\sqrt{t}} e^{-w^2}\, dw \qquad (t > 0).$$



Slika 3: Rješenje $u(x,t)$ za navedeni primjer za slučaj da je U_0=100 °C, c^2=1 cm²/s, i nekoliko vrijednosti t.

Literatura

Erwing Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics